۱۳۹۲/۷/۲۵ : ریاضیات مهندسی:

پس از گفتن مفاهیم و روش GA برمی گردیم به ادامه درس (معادلات حالت)

---

(۷۰) چرا مبحث بهینه سازی را گفتیم؟

در ابتدا معادلات حالت را گفتیم و گفتیم که معادلات حالت آنگونه است که با معلوم بودن $u(t)$ ، $X(t)$ بدست می آید.

حال می خواهیم مسائل مختلف بهینه سازی را با یک فرمول کلی بیان کنیم. به همین

دلیل نیاز بود که کلا با مفاهیم بهینه سازی آشنا شویم. البته

در این درس منظور از بهینه سازی، بهینه سازی به روش

تحلیلی است و نه هوشمند.

---

(۷۱) مسائل بهینه سازی در سیستم‌های کلی چند حالت دارد؟

نوع (۱) نیاز است یک یا چند متغیر تا جای ممکن به نقطه خاصی نزدیک شود.
(در زمان خاص)

نوع (۲) نیاز است انرژی مصرف شده تا جای ممکن حداقل شود.

نوع ③ { نیاز است یک یا چند متغیر در مسیر خود به یک مسیر خاصی
نزدیک باشد.

---

(۷۲) تابع هدفی بنویسید که ۳ نوع مسأله قبل را به صورت
ریاضی بیان کند؟ (یک متغیر و یک ورودی)

نوع ① : { یک متغیر

$$O.F. = \left(\underbrace{x(t_f)}_{\text{مقدار متغیر در زمان نهائی } t_f} - x_0 \right)^2$$

x_0 : مقداری که می‌خواهیم برسیم

چون مثبت باشد. می‌توان از قدر مطلق استفاده کرد ولی در حل تحلیلی
که مشتق می‌گیریم قدر مطلق سخت است.

انرژی

نوع ۲ $\left\{ O.F. = \int_{0}^{t_f} u^2(t)\, dt \right.$

همیشه ورودی به نمای ۲ با یک ضریبی برابر توان است که اگر در زمان ضرب شود تبدیل به انرژی می‌شود و چون متغیر است از انتگرال استفاده می‌کنیم.

نوع ۳: $\left\{ O.F. = \int_{0}^{t_f} \big(\underbrace{x(t)}_{\text{متغیر}} - \underbrace{x_0(t)}_{\text{مسیر مطلوب}}\big)^2 dt \right.$

در تمام لحظات باید فاصله تا مسیر مورد نظر کم باشد.

(۷۳) اگر تابع هدفی نیاز داریم که هر ۳ نوع قبلی را در بر دارد
باید چکار کنیم؟

$$O.F. = \alpha_1 \left(x(t_f) - x_0\right)^2 + \int_0^{t_f} \left(\alpha_2 u^2(t) + \alpha_3 \left(x(t) - x_0(t)\right)^2\right) dt$$

α_1 و α_2 و α_3 ضرایبی هستند که به اهمیت هر کدام
بستگی دارد: مثلاً اگر انرژی مهم‌تر بود

$$\begin{cases} \alpha_2 \gg \alpha_1 \\ \alpha_2 \gg \alpha_3 \end{cases}$$

۷۴ اگر به جای ۱ متغیر n تا متغیر بود حالت کلی O.F. چگونه می شود؟

برای اینکار ما نیاز به یک تعریف جدید داریم:

$$\| \underline{X}(t) \quad \underline{X}_0 \|_H^2 =$$

$$(\underline{X}(t) - \underline{X}_0)^T H \; (\underline{X}(t) - \underline{X}_0)$$

ماتریس قطری

حاصل عبارت بالا به صورت زیر است

فرض کنید ۳ متغیر داریم

$$\underline{X}(t_f) = \begin{bmatrix} x_1(t_f) \\ x_2(t_f) \\ x_3(t_f) \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{X}_0 \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t_f) - x_{10} & x_2(t_f) - x_{20} & x_3(t_f) - x_{30} \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t_f) - x_{10} \\ x_2(t_f) - x_{20} \\ x_3(t_f) - x_{30} \end{bmatrix} =$$

$$h_1\left(x_1(t_f) - x_{10}\right)^2 + h_2\left(x_2(t_f) - x_{20}\right)^2 + h_3\left(x_3(t_f) - x_{30}\right)^2$$

۷۴ که hها شبیه α_1 و α_2 و α_3 نشان دهنده اهمیت هر پارامتر هستند.

حال O.F. را در حالت کلی می‌نویسیم:

$$O.F. = \|X(t_f) - X_0\|_H^2 + \int_0^{t_f} \left(\|\underline{u(t)}\|_Q^2 + \|X(t) - X_0(t)\|_K^2 \right) dt$$

۷۵ هدف مسأله بهینه‌سازی چیست؟ (تکرار)

معادلات حالت سیستم را داریم:

$$\underline{\dot{X}(t)}_{n\times 1} = A_{n\times 1}\, \underline{X(t)}_{n\times 1} + B_{n\times m}\, \underline{u(t)}_{m\times 1}$$

هدف تعیین $\underline{u(t)}$ است بطوریکه تابع زیر مینیمم شود:

$$O.F. = \|\underline{X(t_f)} - \underline{X_0}\|_H^2 + \int_0^{t} \left(\|\underline{u(t)}\|_Q^2 + \|\underline{X(t)} - \underline{X_0(t)}\|_K^2 \right) dt$$

(۷۶) مسأله: فرض کنید ماشینی از نقطه $x=0$ در زمان $t=0$ شروع به حرکت می کند. ورودیهای سیستم گاز و ترمز و متغیرهای سیستم مکان و سرعت است. O.F. را در حالتهای زیر بنویسید!

(۱) می خواهیم در 2^s نزدیکترین نقطه به 3^m باشیم:

(۲) می خواهیم در 2^s به نزدیکترین فاصله به 3^m برسیم و انرژی مینیمم شود.

(۳) می خواهیم در 2^s به نزدیکترین فاصله به 3^m برسیم و انرژی می نیمم شود و سرعت همیشه نزدیک $4^{m/s}$ باشد ولی در آخر سرعت به صفر نزدیک باشد.

$$\begin{cases} x_1(t) & \text{مکان ماشین} \\ x_2(t) & \text{سرعت ماشین} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1(t) & \text{گاز} \\ u_2(t) & \text{ترمز} \end{cases}$$

(اصطکاک صفر)

نوشتن معادلات حالت
کار بسیار سختی است

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = u_1(t) - u_2(t) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \underline{X}(t) = A \, \underline{X}(t) + B \, \underline{u}(t) \\ \underline{X}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ \underline{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

(W) (۱) $O.F. = (x_1(۲^s) - ۳)^۲$

(۲) $O.F. = h_1(x_1(۲^s) - ۳)^۲ + \int_۰^{۲s} (q_1 u_1^۲(t))\, dt$

h_1 و q_1 نسبت به اهمیت موضوع

(۳) $O.F. = h_1(x_1(۲^s) - ۳)^۲ + h_۲(x_۲(۲^s) - ۰)^۲ +$

$$\int_۰^{۲s} \left(q_1 u_1(t)^۲ + k_1(x_۲(t) - ۴)^۲\right) dt$$